МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ГИМНАЗИЯ №6 ГОРОДА ДОНЕЦКА»

ПРОЕКТ

по направлению: математика

«Сходимость степенных рядов в p - адической метрике»

Тип проекта: исследовательский

Руководитель:
учитель математики
Колесник Т.С.
Выполнила: ученица 10-Б класса
Шипинская Злата

г. Донецк, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В математике и её приложениях важную роль играет исследование функций. При этом сложные функции удобнее заменять приближёнными выражениями, содержащими более простые функции. Наиболее простые с вычислительной точки зрения являются многочлены. Поэтому обычно сложные функции представляют в виде степенных рядов, которые определяются как бесконечные суммы выражений вида:

$c_к x^к$, k = 0,1……….. , где $c_к$ - некоторые числа. Например, функцию *sinx* , которая не является многочленом, можно представить в виде ряда:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Также имеются разложения в ряд для *cosx*, *ln(x+1)*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Таким образом, можно считать многие сложные функции бесконечными многочленами. Поэтому важное значение имеет разработка методики для исследования степенных рядов.

В настоящее время известно, что степенные ряды сходятся на некотором интервале и расходятся вне этого интервала, исключая, возможно, точки - границы интервала. На концах интервала вопрос о сходимости гораздо труднее и ответ на него существенно зависит рассматриваемого ряда. Для многих рядов этот вопрос до сих пор не решён.

Однако оказывается, что исследование степенных рядов упрощается, если изучать эти ряды как последовательности их частичных сумм в р-адической метрике. В частности, указанного выше явления с концами интервала сходимости в p-адической случае не наблюдается. Более того, ряд сходится в p-адическом смысле тогда и только тогда, когда его общий член в этом смысле стремится к нулю.

Целью данной работы является исследование на сходимость некоторых степенных рядов относительно p-адической метрики. При этом оказалось, что имеются сходящиеся в p-адическом смысле ряды, которые расходятся в обычном смысле. Это явление позволяет работать с некоторыми расходящимися рядами, понимая их как сходящихся в обобщенном смысле.

§1 ***Числовые ряды***

Определение 1.

Пусть a_n - произвольные числа, $n \in N$ - натуральные числа. ***Рядом*** элементов a_n называют выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad (1)$$

а элементы a_n - его ***членами***.

Определение 2.

Сумма n первых членов ряда (1) называется ***частичной суммой*** и часто обозначается через S_n , т.е.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Определение 3.

Если существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

то ряд (1) сходится, а число S называют ***суммой ряда***.

Если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$ не существует, то ряд (1) называют ***расходящимся***.

Определение 4.

Ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

называется ***n-м остатком*** ряда (1), или ***остатком*** после n-ого члена.

Ряд (1) сходится или расходится вместе со своим остатком, поэтому часто при исследовании вопроса о сходимости ряда вместо него рассматривают n-й остаток.

Необходимое условие сходимости ряда.

Для того чтобы ряд (1) сходился необходимо, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Признаки сравнения числовых рядов.

<u>Теорема 1.</u>

Если ряды (1) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b \qquad (2)$$

положительны и $a_n \le b_n$ для всех $n > n_0$, то из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) вытекает расходимость ряда (2).

<u>Теорема 2.</u>

Если ряды (1) и (2) строго положительны и для всех $n > n_0$ выполняется неравенства

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{в_{n+1}}{в_n},$$

то справедливы выводы предыдущей теоремы.

<u>Теорема 3.</u>

Если ряды (1) и (2) строго положительны и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{b} = c \qquad , 0 < c < \infty,$$

то они сходятся или расходятся одновременно.

<u>Теорема 4.</u>

(Критерий Коши). Для того чтобы ряд (1) сходился необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$
существовал такой номер n_o, начиная с которого выполнялось бы неравенство

$$| S_{n+p} - S_n | = | a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} | < \varepsilon$$

для любого натурального *p*.

§2 Определение и свойства функции $ord_p\, n$

Определение 5. Число p называется ***простым ,*** если оно натурально, отлично от единицы и делится только на себя и на единицу.
P = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, …

Определение 6.

Пусть n - натуральное число.

Каноническим разложением числа n называется (единственное) представление числа n в виде

$$n = \prod_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}_k^{Lk}$$

где P_k – различные простые числа, α_K – натуральные числа или ноль.

Пример. Представили некоторые числа в каноническом виде

1) $20=2^2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \ldots$

здесь $p_1 =2$, $p_2 =3$, $p_3 =5$, $p_4 =7$, $p_5 =11$, …

$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = 0$, …

Т.е. начиная с $k = 4$ все α_k равны нулю. И каноническое разложение числа 20 фактически включает в себя только два простых числа 2 и 5.

2) $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \ldots$,

здесь $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$,…

$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 0$, …

Для этого числа α_k равны нулю начиная с $k = 5$. А каноническое разложение фактически состоит из трёх чисел 2; 5 и 7.

Определение 7. Пусть n – натуральное число, p – простое число. Тогда $ord_p n$ называется показатель степени, с которым число p входит в кононическое разложение числа n.

Другими словами $ord_p n = \alpha_k$, т. е.

$$n = \prod_{k=1}^{\infty} P_k^{ord_{p_k} n}.$$

Пример.

1) $ord_2\, 20 = 2$; $ord_5\, 20 = 1$; $ord_3\, 20 = 0$.

2) $ord_2\, 140 = 2$; $ord_5\, 140 = 1$; $ord_3\, 140 = 0$; $ord_7\, 140 = 1$.

Теорема 5. (Основные свойства функции $ord_p n$)

1) $ord_p\,(a\, b) = ord_p\, a + ord_p\, b$

2) $ord_p\,(-n) = ord_p\, b$.

Доказательство:

1) Обозначим $ord_p\, a = n$, $ord_p b = m$. Пусть число a имеет вид $a = p^n a'$, где a' не делится на p. А число $b = p^m \cdot b^1$, где b' не делится на p. Тогда $a \cdot b = p^n\, a^1\, p^m\, b^1 = p^{n+m}\, a' b'$. Отметим, что $a' b'$ не делится на p. Значит

$ord_p\,(a\, b) = n + m = ord_p a + ord_p b$.

2) Второе свойство сразу следует из определения $ord_p n$.

Определение 8. Для рациональных a функция $ord_p\, a$ определяется равенством

$$ord_p\, a = ord_p\, m - ord_p\, n, \text{ где } a = \frac{m}{n}, \quad m, n \in N.$$

Пример.

1) $ord_2 \frac{3}{2} = ord_2 3 - ord_2 2 = 0 - 1 = -1$

2) $ord_7 \frac{49}{5} = ord_7 49 - ord_7 5 = 2 - 0 = 2.$

§3. *p* – адическая норма.

Определение 9. Функция, заданная на множестве рациональных чисел Q в виде

$$|x| = \begin{cases} 0, & при \quad x = 0 \\ \frac{1}{p^{ord_p x}}, & при \quad x \neq 0 \end{cases}$$

называется *p* – адической нормой числа x.

Пример.

1). Вычислим норму числа 10 по основанию 5.

Сначала посчитаем $ord_5 10$. Поскольку $10 = 5^1 \cdot 2^1$ получаем $ord_5 10=1$.

Значит

$$|10|_5 = \frac{1}{5^{ord_5 10}} = \frac{1}{5}$$

2). Вычислим норму числа 60^3 по основанию 2.

$ord_2 60^3 = ord_2 (15 \cdot 4)^3 = ord_2 (15)^3 \cdot 2^6 = 6$

Значит

$$|60^3|_2 = \frac{1}{2^{ord_2 60^3}} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

<u>Теорема 6.</u> Свойства p-адической нормы.

1). $|x|_p = 0$ тогда и только тогда , когда x = 0;

2). $|X|_P \geq 0$ при любом $x \in Q$;

3). $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$;

4). $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$;

Доказательство 1). и 2). Вытекает сразу из определения.

Докажем 3). Используя свойства функции $ord_p x$.

$$|x \cdot y|_p = \frac{1}{p^{ord_p y}} = \frac{1}{p^{(ord_p x + ord_p y)}} = \frac{1}{p^{ord_p x} \cdot p^{ord_p y}} = \frac{1}{p^{ord_p x}} \cdot \frac{1}{p^{ord_p y}} = |x|_p \cdot |y|_p .$$

§4 *p* – адическое расстояние.

В обычном анализе расстоянием между двумя числами на координатной оси является модуль разности между ними (т.е. | x-y |). Роль нормы выполняет модуль.

В *p* – адической анализе есть своя норма и согласно ей расстояние между точками определяется как p – адическая норма разности x – y (т.е. $|x - y|_p$).

Определение 10.

***p* – адическим расстоянием (метрикой)** между рациональными числами *x* и *y* называется величина d(x,y), которая считается по правилу

d (x.y) = | x – y |.

Пример.

Вычислим p – адическое расстояние между числами

1) $x = \frac{1}{15^4}; \quad y = \frac{1}{81}, \quad p = 3$

$$d(x,y) = |x - y|_p = \left|\frac{1}{15^4} - \frac{1}{81}\right|_3 = \left|\frac{1}{3^4 \cdot 5^4} - \frac{1}{3^4}\right| = \left|\frac{-624}{3^4 5^4}\right|_3.$$

Для того чтобы продолжить вычисление, посчитаем отдельно следующие нормы

$$|-624|_3 = \frac{1}{3^{ord_3 624}} = \frac{1}{3^{ord_3 3 \cdot 208}} = \frac{1}{3};$$

$$|3^4 \cdot 5^4|_3 = \frac{1}{3^{ord_3 3^4 \cdot 5^4}} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}.$$

Теперь продолжим

$$\left|\frac{624}{3^4 \cdot 5^4}\right|_3 = \frac{|624|_3}{|3^4 \cdot 5^4|_3} = \frac{1}{3} : \frac{1}{81} = \frac{81}{3} = 27.$$

Окончательно получаем

$$\left|\frac{1}{15^4}-\frac{1}{81}\right|_3=27.$$

Т.е. *p* – адческое расстояние между указанными числами равно 27.

А обычное расстояние равно

$$\frac{624}{3^4\cdot 5^4}=\frac{208}{3^3\cdot 5^4}<1$$

§5 *Числовые ряды в p-адической метрике.*

Поскольку p – адической норма определена только для рациональных рядов, будем рассматривать числовые ряды с рациональными членами. Для таких рядов определения 1-4 имеют место. А вот критерий Коши сходимости ряда в p – адической метрике существенно упрощается.

Теорема 7. Критерий Коши.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (a_k \in Q)$ является сходящимся в p – адической метрике тогда и только тогда, когда общий член стремится к нулю.

Замечание: Указанное утверждение не верно в обычном анализе, где верно лишь необходимое условие (из сходимости ряда следует лишь стремление общего члена, но не наоборот).

<u>Определение 11.</u> **Степенным рядом** называется ряд вида:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad где\, a_k, x -$ рациональные.

Определение 12.

Множество тех x для которых сходится указанный степенной ряд называется

§6 Исследование на сходимость степенных рядов в *p* – адической метрике.

Пользуясь критерием Коши исследуем некоторые степенные ряды на сходимость в *p* – адической метрике.

1. $\sum_{k=1}^{\infty}$ (7p)^k x^k , где *P* – некоторое простое число, *x* – рациональные числа.

Решение.

Сначала посчитаем *p* – адическую норму общего члена ряда:

$$|(7p)^k\ x^k|_p = |(7p)^k|_p = \frac{1}{p^{ord_p(7p)^k}} \cdot |x^k|_p = \frac{1}{p^{ord_p 7^k\ ord_p p^k}} \cdot |x^k|_p = \frac{|x^k|_p}{p^k} = \frac{|x|_p^{\ k}}{p^k}.$$

В данном случае возможны два случая:

1) $|x|_p^k \le P^k$, тогда $(\frac{|x|}{p}) \le 1$, а $(\frac{|x|}{p})^k$ стремится к нулю при к стремящемся к бесконечности. Значит по критерию Коши при $|x|_p \le P$ данный ряд сходится.

2)$|x|_p k > p^k$, тогда $\frac{|x|_p^{\ k}}{p^k} = (\frac{|x|_p}{p})^k$ стремится к бесконечности при *k* стремящихся к бесконечности. Значит по критерию Коши при $|x|_p > P$ данный ряд расходится.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{pk+1}$ *p* - некоторое простое число.

Решение.

Вычислим *p* – адическую норму общего члена ряда:

$$|\frac{p^k}{pk+1}|_p = \frac{|p^k|_p}{|pk+1|_p} = \frac{1}{p^{ord_p p^k}} : \frac{1}{p^{ord_p(pk+1)}} = \frac{1}{p^k},$$

поскольку $ord_p\ (p_{k\ +\ 1})$=0. Значит общий член ряда стремится к нулю при *k* стремящемся к бесконечности, и данный ряд сходится по критерию Коши.

Замечание. В обычной метрике этот ряд расходится, т.к. в ней общий член ряда стремится к бесконечности.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (p^{3k} - \frac{1}{p^{2k}})\, x^k,$

где p – некоторое простое число, x – рациональное число.

Решение.

Как обычно вычислим норму общего члена ряда:

$$|(p^{3k} - \frac{1}{p^{2k}})\ x^k|_p = |\frac{p^{5k}-1}{p^{2k}}|_p \cdot |x^k|_p = \frac{|p^{5k}-1|_p \quad |x^k|_p}{|p^{2k}|_p}.$$

Посчитаем отдельно:

$| 5^{5k}\text{-}1|_p = \frac{1}{p^{ord_p(p^{5k}-1)}} = \frac{1}{p^0} = 1,$ поскольку число p^{5k}-1 не делится на p .

$| p^{2k}|_p = \frac{1}{p} = \frac{1}{p}.$

В итоге получаем, что норма равна

$P^{2k}\ |x|_p^{\ k} = (p^2\,|x|_p)^k.$

Рассмотрим два случая:

1) $|x|_p \le \frac{1}{p^2}$, тогда $p^2|x|_p \le 1$ и $(P^2\ |x|_p)^k$ стремится к нулю при κ стремящемся к бесконечности.

2) $|x|_p > \frac{1}{p^2}$, тогда $p^2|x|_p >$ $(P^2|x|_p)^k$ стремится к бесконечности при k стремится к бесконечности.

Значит по критерию Коши данный ряд сходится при $|x|_p \le \frac{1}{p^2}$, и

расходится

при $|x|_p > \frac{1}{p^2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коблиц Н. p – адические числа. – М. : Наука. – 1982 г. – 280с.

2. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. – Главная редакция физико – математической литературы из – ва «Наука». – 1972 г. – 496с.

3. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по математическому анализу. Ряды, функции векторного аргумента. – К. : Вища шк. – 1986 г. – 567с.

4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. (часть 1). – М. : Наука. – 1982г. – 616с.

ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ:

1. https://epmat.ru/modul-geometriya/urok-1-trigonometriya/
2. https://alexlarin.net/ege21.html
3. https://www.academia.edu/10962821/МАТЕМАТИКА_ЕГЭ_2012_Тригонометрические_уравнения_методы_решений_и_отбор_корней_типовые_задания_С1