МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ «ГИМНАЗИЯ №6 ГОРОДА ДОНЕЦКА»

ПРОЕКТ

по направлению: математика

«Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях»

Тип проекта: исследовательский

Руководитель:
учитель математики
Колесник Т.С.
Выполнила: ученица 10-Б класса
Матушевская Валерия

г. Донецк, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Слово «тригонометрия» греческое, оно переводится как «измерение треугольников» (τρίγονον- «тригон»-треугольник и μετρειν – «метрео» - измеряю).

Тригонометрия, как и всякая другая наука, выросла из практической деятельности человека. Потребности развивающегося мореплавания, для которого требовалось умение правильно определять курс корабля в открытом море по положению небесных светил, оказали большое влияние на развитие астрономии и тесно связанной с ней тригонометрией. Предполагают, что основополагающее значение для развития тригонометрии в эпоху ее зарождения, имели работы древнегреческого астронома Гиппарха Никейского (180—125 лет до н. э.) (прил. №3). Систематическое использование полной окружности в 360° установилось в основном благодаря Гиппарху и его таблице хорд (прил. №2). Т.е. таблицы, которые выражают длину хорды для различных центральных углов в круге постоянного радиуса, что является аналогом современных таблиц тригонометрических функций. Впрочем, до нас не дошли оригинальные таблицы Гиппарха, как и почти все, что им написано. И мы, можем составить себе о них представление главным образом по сочинению «Великое построение» или «Альмагесту» знаменитого астронома Клавдия Птолемея, жившего в середине II века н.э.

Несмотря на то, что в работах ученых древности нет «тригонометрии» в строгом смысле этого слова, но по существу они, пользуясь известными им средствами элементарной геометрии, решали те задачи, которыми занимается тригонометрия. Например, задачи на решение треугольников (определение всех сторон и углов треугольника по трем его известным элементам), теоремы Евклида и Архимеда, представленные в геометрическом виде, эквивалентны специфическим тригонометрическим формулам. Главным достижением средневековой Индии стала замена хорд синусами. Это позволило вводить различные функции, связанные со сторонами и углами прямоугольного треугольника. Таким образом, в Индии было положено начало тригонометрии, как учению о тригонометрических величинах.

Учёные стран Ближнего и Среднего Востока с VIII века развили тригонометрию своих предшественников. Уже в середине IX века среднеазиатский учёный аль - Хорезми написал сочинение «Об индийском счёте». После того, как трактаты мусульманских ученых были переведены на латынь, многие идеи греческих, индийских и мусульманских математиков стали достоянием европейской, а затем и мировой науки. В дальнейшем потребности географии, геодезии, военного дела, способствовали развитию тригонометрии. Особенно усиленно шло ее развитие в средневековое время. Большая заслуга в формировании тригонометрии как отдельной науки принадлежит азербайджанскому ученому Насир ад-Дину ат-Туси(1201-1274), написавшему «Трактат о полном четырехсторроннике». Творения ученых этого периода привели к выделению тригонометрии как нового самостоятельного раздела науки. Однако в их трудах еще не была введена необходимая символика. Современный вид тригонометрия получила в трудах Леонарда Эйлера (1707-1783). На основании трудов Эйлера были составлены учебники тригонометрии, излагавшие ее в строгой научной последовательности (прил. №4). Тригонометрические вычисления применяются во многих областях человеческой деятельности: в геометрии, в физике, в астрономии, в архитектуре, в геодезии, инженерном деле, в акустике, в электронике и т.д.

I РАЗДЕЛ (теоретический)

Тема проекта и её актуальность: почему я выбрала тему «Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях»?

- ✓ Расширить и углубить свои знания, полученные в курсе геометрии 8-9 класса.
- ✓ Тригонометрические уравнения рассматриваются в курсе алгебры и начал математического анализа 10-11 класса.
- ✓ Тригонометрические уравнения включены в КИМы ЕГЭ по математике.

Решение тригонометрических уравнений и отбор корней, принадлежащих заданному промежутку - это одна из сложнейших тем математики, которая выносится на Единый Государственный Экзамен. По результатам анкетирования многие учащиеся затрудняются или вообще не умеют решать тригонометрические уравнения и особенно затрудняются в отборе корней, принадлежащих промежутку. Немаловажно также знать, тригонометрические формулы, табличные значения тригонометрических функций для решения целого ряда заданий Единого Государственного Экзамена по математике.

Цель проекта:

изучить способы отбора корней в тригонометрических уравнениях и выбрать для себя наиболее рациональные подходы для качественной подготовки к ЕГЭ.

Задачи:

- познакомиться с историческими сведениями о возникновении тригонометрии, как науки;
- изучить соответствующую литературу;
- научиться решать тригонометрические уравнения;
- найти теоретический материал и изучить методы отбора корней в тригонометрических уравнениях;
- научиться отбирать корни в тригонометрических уравнениях, принадлежащим заданному промежутку;
- подготовиться к ЕГЭ по математике.

Приёмы отбора корней тригонометрического уравнения на заданном промежутке.

При решении тригонометрических уравнений предлагается провести отбор корней из множества значений неизвестного. В тригонометрическом уравнении отбор корней можно осуществлять следующими способами: арифметическим, алгебраическим, геометрическим и функционально-графическим.

Арифметический способ отбора корней состоит в непосредственной подстановке полученных корней в уравнение, учитывая имеющиеся ограничения, при переборе значений целочисленного параметра.

Алгебраический способ предполагает составление неравенств, соответствующих дополнительным условиям, и их решение относительно целочисленного параметра.

Геометрический способ предполагает использование при отборе корней двух вариантов: тригонометрической окружности или числовой прямой. Тригонометрическая окружность более удобна, когда речь идет об отборе корней на промежутке или в случае, когда значение обратных тригонометрических функций, входящих в решения, не являются табличными. В остальных случаях предпочтительнее модель числовой прямой. Числовую прямую удобно использовать при отборе корней на промежутке, длина которого не превосходит 2π или требуется найти наибольший отрицательный или наименьший положительный корень уравнения.

Функционально-графический способ предполагает отбор корней осуществлять с использование графиков тригонометрических функций. Чтобы использовать данный способ отбора корней, требуется умение схематичного построения графиков тригонометрических функций.

II РАЗДЕЛ (практический)

Покажу практически три наиболее эффективных и рациональных, с моей точки зрения, метода отбора корней на примере решения следующего тригонометрического уравнения:
$\sin x=\cos 2x$;

$\sin x-\cos 2x=0$; [применили формулу двойного угла: $\cos 2x = \cos^2 x-\sin^2 x$]

$\sin x-(\cos^2 x-\sin^2 x) = 0$;

$\sin x-(1-\sin^2 x-\sin^2 x) = 0$;

$\sin x-(1-2\sin^2 x) = 0$;

$2\sin^2 x+\sin x-1= 0$.

Введем новую переменную: $\sin x=t$, $-1\le t\le 1$, получим

$2t^2+t-1=0$

$D=b^2-4ac$, т.е. $D=9$

$t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

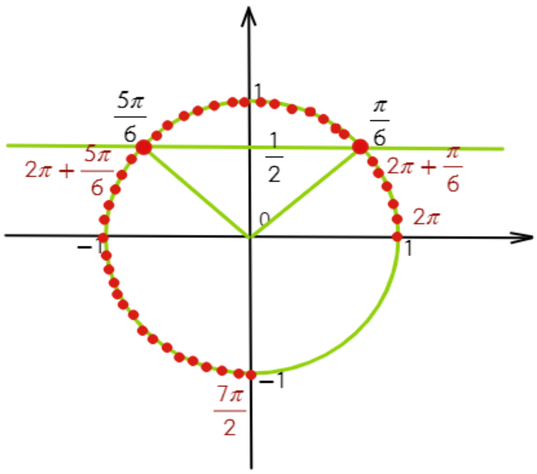
Вернемся к замене:

$\sin x =-1$ $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$	$\sin x = \frac{1}{2}$ $x= \arcsin\frac{1}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ $x=\pi-\arcsin\frac{1}{2}+2\pi m,\ m\in Z$ $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$ $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z$

б) Рассмотрим три способа отбора корней, попадающих в отрезок $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

1 способ: обратимся к единичной окружности. Отметим на ней дугу, соответствующую указанному отрезку, т.е. выполним отбор корней арифметическим способом и с помощью тригонометрической окружности:

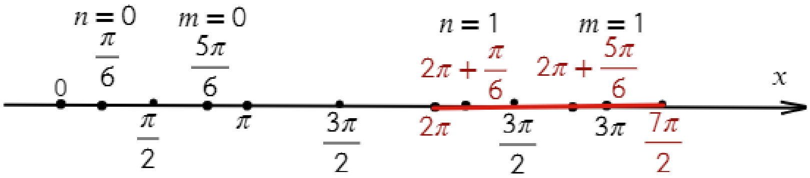
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 2 = \frac{7\pi}{2}$;
$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$;
$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi.}{6}$



2 способ: указанный отрезок соответствует неравенству: $2\pi \le x \le \frac{7\pi}{2}$.
Подставим в него полученные корни:

$2\pi \le \frac{\pi}{6} + 2\pi n \le \frac{7\pi}{2}$; $2\pi - \frac{\pi}{6} \le 2\pi n \le \frac{7\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6} \le 2\pi n \le \frac{20\pi}{2}$ $\Vert * \frac{1}{\pi}$; $\frac{11}{6} \le 2n \le \frac{20}{6}$ $\Vert * \frac{1}{2}$; $\frac{11}{12} \le n \le \frac{20}{12}$; $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$ При n=1; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = \frac{13\pi}{6}$	$2\pi \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi \boldsymbol{m} \le \frac{7\pi}{2}$; $2\pi - \frac{5\pi}{6} \le 2\pi \boldsymbol{m} \le \frac{7\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6} \le 2\pi \boldsymbol{m} \le \frac{16\pi}{6}$; $\Vert * \frac{1}{2\pi}$; $\frac{7}{12} \le \boldsymbol{m} \le \frac{4}{3}$; $\frac{7}{12} \le \boldsymbol{m} \le 1\frac{1}{3}$; $\boldsymbol{k} \in$Z; При $\boldsymbol{m}$ =1; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = \frac{17\pi}{6}$	$2\pi \le -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{\pi k} \le \frac{7\pi}{2}$; $2\pi + \frac{\pi}{2} \le 2\pi \boldsymbol{k} \le \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2} \le 2\pi \boldsymbol{k} \le \frac{8\pi}{2}$; $\Vert * \frac{1}{2\pi}$; $\frac{5}{4} \le \boldsymbol{k} \le \mathbf{2}$; $1\frac{1}{4} \le \boldsymbol{k} \le \mathbf{2}$; $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}$ При $\boldsymbol{k}$ =1; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 2 = \frac{7\pi}{2}$

3 способ: разместим корни уравнения на числовой прямой. Сначала отметим корни, подставив вместо n, m и k нуль (0), а потом добавим к каждому корню периоды.



Нам останется только выбрать корни, которые попали в нужный нам отрезок.

Ответ: а) х= $-\pi + 2\pi k,\ m \in Z;$ х= $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z,$ х=$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in Z;$
б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$. (Более подробный пример в приложении №1)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При работе над моим проектом я изучила методы решения тригонометрических уравнений и способы отбора корней тригонометрических уравнений. Выяснила для себя положительные и отрицательные моменты. При апробации этих подходов в отборе корней тригонометрического уравнения, понимаешь, что каждый из этих способов удобен по-своему в том или ином случае. Например, алгебраический способ (решение неравенством) наиболее эффективен, когда промежуток для отбора корней достаточно большой, в тоже время он дает практически стопроцентное нахождение целочисленного параметра для вычисления корней, а применение арифметического способа приводит к громоздким вычислениям. При отборе корней уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям, т.е. когда корни уравнения принадлежат заданному промежутку, мне проще и нагляднее получить корни с помощью тригонометрической окружности, а проверить себя можно арифметическим способом. Замечу, что при решении тригонометрических уравнений трудности, связанные с отбором корней, возрастают, если в уравнении приходится учитывать ОДЗ. Как показывает практика и анкетирование моих одноклассников, из четырёх возможных методов отбора корней тригонометрического уравнения по дополнительным условиям, наиболее предпочтительным является отбор корней по окружности. Анкетирование проходили 12 респондентов, изучающих тригонометрию (прил. №5). Большинство из них отвечали, что этот раздел математики достаточно сложный: большой объем информации, очень много формул, табличных значений, которые нужно знать и уметь применять на практике. Еще как одна из проблем - небольшое количество времени, отведенное на изучение этого сложного раздела математики. И я разделяю их мнение. При такой сложности, многие считают, что тригонометрия важный раздел математики, который находит применение в других науках и практической деятельности человека.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни/ [С.М.Никольский, М.К. Потапов, Н.Н.Решетников и др.]-3 –е изд.- М.: Просвещение, 2016.
2. Алгебра и начала математического анализа: Учеб для 10-11 кл.общеобразоват. организаций / А.Н.Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницин и др. под редакцией А.Н.Колмогорова- М. Просвещение, 2017.
3. С.В Кравцев. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных – М: Издательство: «Экзамен», 2005.
4. Корянов А. Г., Прокофьев А. А. - Тригонометрические уравнения: методы решения и отбор корней. - М.: Математика ЕГЭ, 2012.

Электронные ресурсы:

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/Тригонометрия
2. https://www.yaklass.ru/p/ege/matematika/podgotovka-k-ege-po-matematike-profilnyi-uroven-10744/trigonometricheskie-uravneniia-s-ogranicheniiami-zadacha-13-536475/re-a4b9cc95-fe96-40c2-b70c-f46548b726a0
3. https://mat.1sept.ru/1999/no19.htm
4. https://epmat.ru/modul-geometriya/urok-1-trigonometriya/
5. https://alexlarin.net/ege21.html
6. https://www.academia.edu/10962821/МАТЕМАТИКА_ЕГЭ_2012_Тригонометрические_уравнения_методы_решений_и_отбор_корней_типовые_задания_C1
7. http://teacher-andreeva.ru/wp-content/uploads/2016/03/тригоном-ур-я.pdf

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение №1

2 способа **отбора корней при решении тригонометрического уравнения**:

- ✓ с помощью решения неравенств;
- ✓ с помощью тригонометрической окружности.

Например,

а) Решить уравнение $\sqrt{2}\cos^2x=\sin(\pi/2+x)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-7\pi/2; -2\pi]$.

Решим пункт а) Воспользуемся формулой приведения для синуса $\sin(\pi/2+x) = \cos(x)$; $\sqrt{2}\cos^2x = \cos x$;

$\sqrt{2}\cos^2x - \cos x = 0$; $\cos x(\sqrt{2}\cos x - 1) = 0$, т.е.

$\cos x = 0$ $x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$	$\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ $\cos x = 1/\sqrt{2}$; $\cos x = \sqrt{2}/2$ $x = \arccos(\sqrt{2}/2) + 2\pi k,\ k \in Z$ $x = -\arccos(\sqrt{2}/2) + 2\pi m,\ m \in Z$ $x = \pi/4 + 2\pi k,\ k \in Z$ $x = -\pi/4 + 2\pi m,\ m \in Z$

Решим пункт б).

I. Отбор корней с помощью неравенств

Здесь все делается просто, полученные корни подставляем в заданный нам промежуток $[-7\pi/2; -2\pi]$, находим целые значения для n.

$-7\pi/2 \le \pi/2 + \pi n \le -2\pi$;

Сразу делим все на π или умножаем на $1/\pi$

$-7/2 \le 1/2 + n \le -2$;

$-7/2 - 1/2 \le n \le -2 - 1/2$;

$-4 \le n \le -5/2$.

Целые n в этом промежутке это: $n=-4$ $n=-3$.

Значит, корни, принадлежащие этому промежутку, будут следующие:

$x=\pi/2+\pi(-4)=-7\pi/2$; $x=\pi/2+\pi(-3)=-5\pi/2$.

Аналогично решаем еще два неравенства:

$-7\pi/2 \le \pi/4+2\pi k \le -2\pi$;

$-15/8 \le k \le -9/8$.

Получили, что целых k в этом промежутке нет.

$-7\pi/2 \le -\pi/4+2\pi m \le -2\pi$;

$-13/8 \le m \le -7/8$.

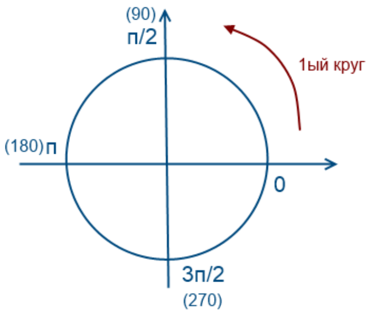
Получили одно целое n в этом промежутке, $m=-1$. Значит, отобранный корень на этом промежутке имеет вид: $x=-\pi/4+2\pi\cdot(-1)=-9\pi/4$.

Ответ: $-7\pi/2$, $-5\pi/2$, $-9\pi/4$.

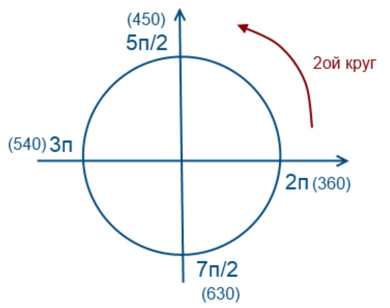
II. Отбор корней с помощью тригонометрической окружности.

Чтобы использовать этот способ надо понимать, как работать с окружностью. Так как функции синус, косинус, тангенс и котангенс периодичны, то окружность, можно обходить бесконечное число раз.

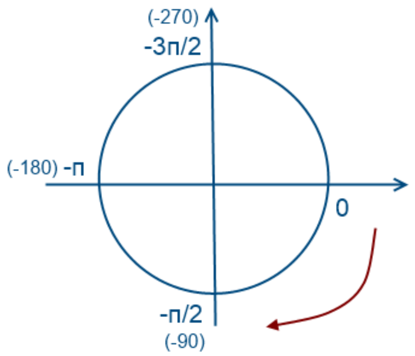
«Обойдем» окружность один раз против часовой стрелки (положительное направление, т.е. значения будут положительные)



«Обойдем» окружность два раза против часовой стрелки (положительное направление т.е. значения будут положительные)

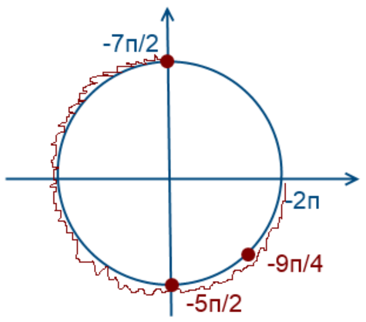


«Обойдем» 1 раз по часовой стрелки (отрицательное направление, т.е. значения будут отрицательные)



Вернемся к вопросу об отборе корней на промежутке
[–7π/2; –2π].

Чтобы попасть к числам –7π/2 и –2π надо «обойти» окружность против часовой стрелки два раза. Для того, чтобы найти корни уравнения на этом промежутке надо прикидывать и подставлять.



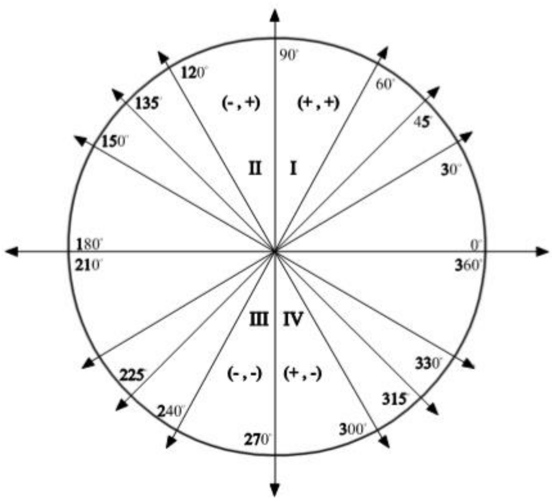
Рассмотри x = π/2 + πn. Какой приблизительно должен быть n, чтобы значение x было где–то в этом промежутке? Предположим n= –2, получаем x=π/2 – 2π = –3π/2, очевидно, это не входит в наш промежуток. Значит, берем меньше n=–3, то x= π/2 – 3π = –5π/2, это подходит. Попробуем еще n=–4, то x=π/2 – 4π = –7π/2, также подходит.

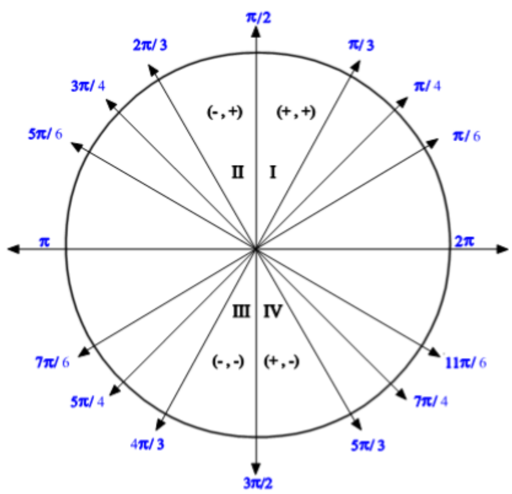
Рассуждая аналогично для x=π/4 + 2πk, k ∈ Z и x=–π/4 + 2πm, m ∈ Z находим еще один корень x=–9π/4.

Сравнение двух методов.

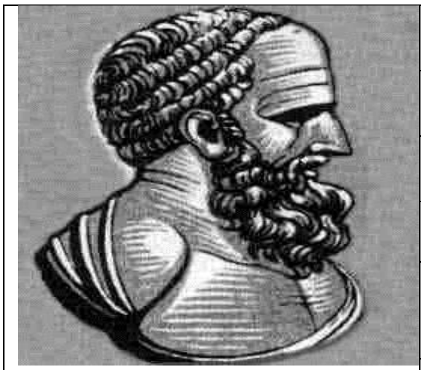
Первый способ (с помощью неравенств) гораздо надежнее и намного проще для понимания, но нужно уметь решать простейшие неравенства. Если действительно серьезно разобраться с тригонометрической окружностью, то отбор корней по второму методу будет гораздо быстрее. Плюс экономия времени на экзамене.

Приложение№2

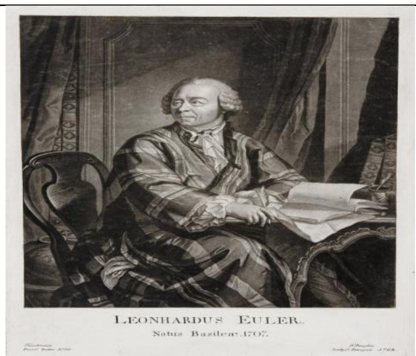




Приложение №3

<table>
<tr><td rowspan="6"></td><td>Имя при рождении</td><td>др.-греч. Ἵππαρχος</td></tr>
<tr><td>Дата рождения</td><td>около 190 до н. э.</td></tr>
<tr><td>Место рождения</td><td>Изник или Никея</td></tr>
<tr><td>Дата смерти</td><td>около 120 до н. э.</td></tr>
<tr><td>Место смерти</td><td>Родос, Греция или Римская республика</td></tr>
<tr><td>Научная сфера</td><td>астрономия</td></tr>
<tr><td>Гиппáрх Никéйский - величайшим астроном античности, механик, географ и матема тик II века до н. э.</td><td></td><td>Гиппарх (слева, держит звёздный глобус) и Птолемей. Деталь «Афинской школы» Рафаэля.</td></tr>
</table>

Приложение №4

Леона́рд Э́йлер-крупнейший математик XVIII века , механик, внёсший огромный вклад в развитие физики, астрономии, оптики, баллистики, кораблестроения, в теорию музыки, глубоко изучал медицину, химию, ботанику, воздухоплавание, множество европейских и древних языков. Академик Петербургской, Берлинской, Туринской, Лиссабонской и Базельской академий наук, иностранный член Парижской академии наук. Первый российский член Американской академии искусств и наук. Почти полжизни провёл в России, где внёс существенный вклад в становление российской науки.

Приложение №5